ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (Msc)
Email: kdimoglou@onlymaths.gr

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1 – Γραμμική Άλγεβρα 1. (2023-2024)

1. Είναι

$$2(A-B+3C)+3(2A+6B-6C)-4(2A+4B-3C)=$$

$$\cancel{2A}-\cancel{2B}+\cancel{6C}+\cancel{6A}+\cancel{18B}-\cancel{18C}-\cancel{8A}-\cancel{16B}+\cancel{12C}=\mathbb{O}_n.$$

2. Ορίζονται τα γινόμενα $A\cdot B\in M_2(\mathbb{R})$ (γιατί, το πλήθος στηλών του A και το πλήθος γραμμών του B είναι 4), $B\cdot A\in M_4(\mathbb{R})$ (γιατί, το πλήθος στηλών του B και το πλήθος γραμμών του A είναι 2), $B\cdot C\in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ (γιατί, το πλήθος στηλών του B και το πλήθος γραμμών του C είναι 2) και $A\cdot B\cdot C\in M_2(\mathbb{R})$ (γιατί, το πλήθος στηλών του $A\cdot B$ & το πλήθος γραμμών του C είναι 2). Το γινόμενο $C\cdot B$ δεν ορίζεται γιατί το πλήθος στηλών του C είναι 2 και το πλήθος γραμμών του B είναι $4\neq 2$.

Υπολογισμός γινομένων:

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (Msc)
Email: kdimoglou@onlymaths.gr

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

3. $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$B^3 = B \cdot B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha \cdot c & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

Θδο υπαρχει ο C^{-1} και είναι ο ίδιος ο C

Αρκεί νδο $C \cdot C = I_3$. Τοτε, λόγω μοναδικότητας του C^{-1} συνάγουμε ότι $C^{-1} = C$.

Έχουμε,

$$C \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Άρα, $C^{-1} = C$

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (Msc)
Email: kdimoglou@onlymaths.gr

4. Ζητάμε τον πίνακα $X \in M_2(\mathbb{R})$ τ.ω

$X \cdot A = I_2$

Θέτουμε $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Τότε,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} \alpha - 2\beta & 2\alpha + \beta \\ \gamma - 2\delta & 2\gamma + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Big| \xrightarrow[(\cdot 2)]{+} \quad 5\alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{5}, \quad \beta = -\frac{2}{5}$$

$$\begin{cases} \gamma - 2\delta = 0 \\ 2\gamma + \delta = 1 \end{cases} \Big| \xrightarrow[(\cdot 2)]{+} \quad 5\gamma = 2 \implies \gamma = \frac{2}{5}, \quad \delta = \frac{1}{5}.$$

Άρα, $X = A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ας βρούμε τώρα τον πίνακα $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ τ.ω

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Πολ/ζουμε με A^{-1} στην παραπάνω εξίσωση $\Longrightarrow$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{= I_2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff I_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (Msc)
Email: kdimoglou@onlymaths.gr

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1+2 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

5. Ζητάμε τους πίνακες $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ τ.ω

$X\cdot A = A\cdot X$.

Είναι $X\cdot A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+\beta \\ \gamma & \gamma+\delta \end{pmatrix}$ και

$A\cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & \beta+\delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

Έχουμε, $X\cdot A = A\cdot X \iff \left\{\begin{array}{l} \cancel{\alpha} = \cancel{\alpha}+\gamma \\ \alpha+\cancel{\beta} = \cancel{\beta}+\delta \\ \gamma = \gamma \\ \cancel{\delta} = \gamma+\cancel{\delta} \end{array}\right. \iff$

$\gamma = 0$, $\alpha = \delta$

Άρα, $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

6. Είναι

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (Msc)
Email: kdimoglou@onlymaths.gr

Απ' τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο:

$$\begin{array}{r|l} 2015 & 4 \\ \hline 3 & 53 \end{array}$$

$2015 = 4 \cdot 53 + 3$

Έτσι, $A^{2015} = A^{4 \cdot 53 + 3} = A^{4 \cdot 53} \cdot A^3 = (A^4)^{53} \cdot A^3$

$$= I_3^{53} \cdot A^3 = A^3 = A^2 \cdot A$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Είναι $A^4 - A^3 + A^2 - A + I_n = \mathbb{O} \Leftrightarrow$

$$-A^4 + A^3 - A^2 + A = I_n \Leftrightarrow$$

$$A(-A^3 + A^2 - A + I_n) = I_n$$

Άρα, $A^{-1} = -A^3 + A^2 - A + I_n$

$$= -(A^3 - A^2 + A - I_n) = -A^4$$

8. Θέτουμε $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}, I_2$

Τότε, $A^2 = A \cdot A = A$

Θέτουμε $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}, I_2$

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (Msc)
Email: kdimoglou@onlymaths.gr

Τότε, $B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. Θα δείξουμε ότι:

$$(A^{-1}+B^{-1}) \cdot \left[A \cdot (A+B)^{-1} \cdot B\right] = I_n.$$

Έχουμε,

$$(A^{-1}+B^{-1}) \cdot \left[A \cdot (A+B)^{-1} \cdot B\right] =$$

$$A^{-1} \cdot \left(A \cdot (A+B)^{-1} \cdot B\right) + B^{-1} \cdot \left(A \cdot (A+B)^{-1} \cdot B\right) =$$

$$\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{=I_n} \cdot (A+B)^{-1} \cdot B + B^{-1} \cdot A \cdot (A+B)^{-1} \cdot B =$$

$$(A+B)^{-1} \cdot B + B^{-1} \cdot A \cdot (A+B)^{-1} \cdot B =$$

$$B^{-1} \cdot B \cdot (A+B)^{-1} \cdot B + B^{-1} \cdot A \cdot (A+B)^{-1} \cdot B =$$

$$B^{-1} \left(B \cdot (A+B)^{-1} + A \, (A+B)^{-1} \right) B =$$

$$B^{-1} \, (B+A)(A+B)^{-1} \cdot B = B^{-1} (A+B)(A+B)^{-1} \cdot B$$

$$B^{-1} \cdot I_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n$$

Άρα, $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = A \, (A+B)^{-1} \cdot B$ □

Τέλος λύσεων φυλλαδίου #1.

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (Msc)
Email: kdimoglou@onlymaths.gr

Only Maths
-Official-